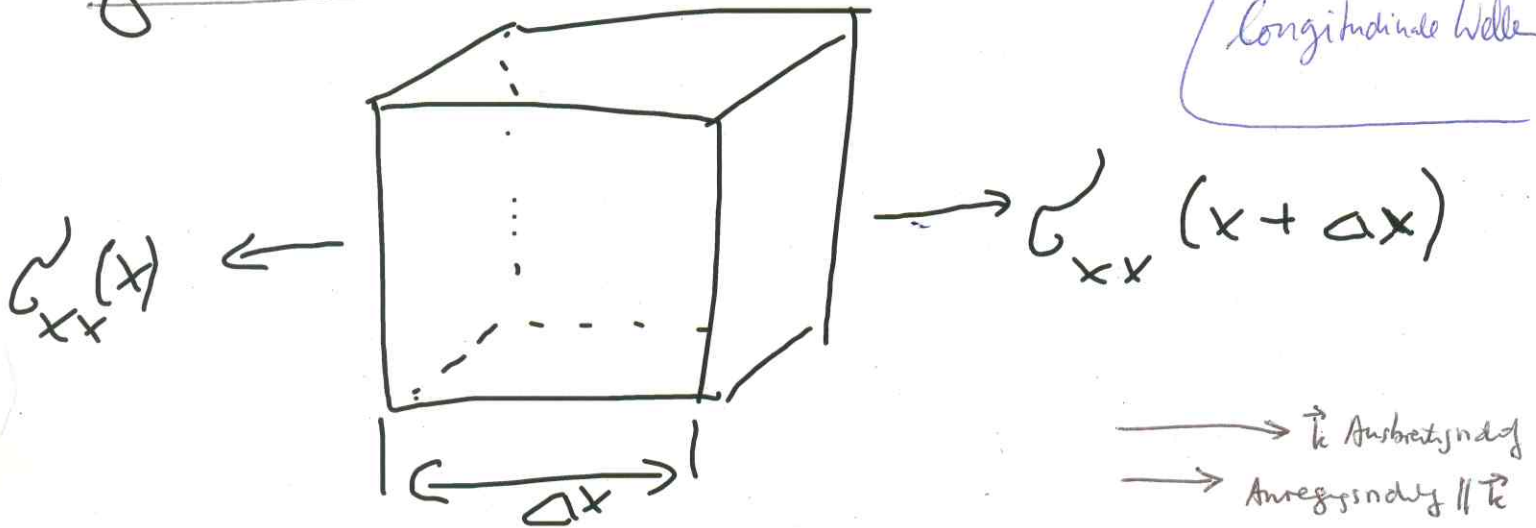


Bewegungsgleichung / Wellengleichung für Schallwellen

Longitudinale Welle



$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{F}{A} = c_{xx}$$

Nettokraft auf Würfel

$$\Delta F = [c_{xx}(x + \Delta x) - c_{xx}(x)] \Delta y \Delta z$$

$$= \underbrace{\frac{\Delta c_{xx}}{\Delta x}}_{\text{Gradient}} \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{Volumenelement}}$$

$$\Rightarrow F = a \quad m$$

über setzt in Dichte $\left(* \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)$

$$\frac{m}{\Delta x \Delta y \Delta z} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

$\uparrow$
 Auslenkung
 Beschleunigung

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

mit

$$\sigma_{xx}$$

$$= C_{11} \epsilon_{xx}$$

$$= C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

Wellengleichung (longitudinal)

Ansatz

$$u_x = u_0 \exp(i(kx - \omega t))$$

liefert

$$\omega^2 \rho = C_{11} k^2$$

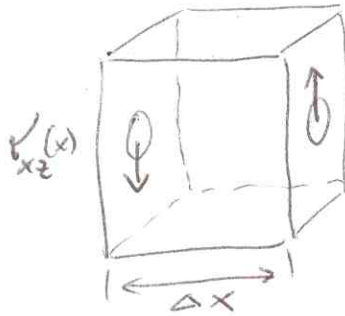
$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$$

lineare
Dispersion
der
Schallwelle

(longitudinal!)

Nun analog zur Schallwelle (s.o.) und insbesondere Longitudinale Welle:
 Betrachte transversale Welle (Scherwelle)

transversale Welle



Anregungsrichtung $\perp \vec{k}$
 $\vec{k}$ Ausbreitungsrichtung(x)

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \hat{=} \frac{F}{A} = \sigma_{xz} \quad \text{hier Kraft tangential 2 Flächen; mit } \sigma_{xz}(x) \text{ und } \sigma_{xz}(x+\Delta x) \text{ entgegengerichtet } \downarrow \uparrow (+ \text{ Scherung})$$

Analoge Rechnung wie bei Longitudinale Welle liefert

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \sigma_{xz} &= C_{xzxz} \epsilon_{xz} + C_{xzzx} \epsilon_{zx} \\ &= 2 C_{44} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \right)$$

$$\text{Ansatz } u_z = u_z^{(0)} \exp(i(kx - \omega t)) \quad \left(\text{prüfen } \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \text{ liefert } = 0 \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = C_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

$$\text{liefert } \omega^2 \rho = C_{44} k^2$$

$$V_{\text{transversal}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

Beachte:

C_{44} ist Schermodul
 = kubische Kristall
 oder allg. Schermodul;
 dies ist $= 0$ für Flüssigkeit
 d.h. keine transversale Welle
 für Flüssigkeit

Ferner ist immer $V_{\text{Longitudinal}} > V_{\text{transversal}} \sqrt{\frac{4}{3}}$, also Longitudinal ist ~ 25% schneller
 (Landau VII, S.112)