

Wiederholung: Fourierreihen und Fouriertransformation¹

Unter einer harmonischen Schwingung verstehen wir eine Sinus- oder Cosinus-Schwingung mit einer einzigen Frequenz. Für eine zeitliche Schwingung wird diese also durch $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ beschrieben, mit der Frequenz $\omega = 2\pi/T$, wobei T die Schwingungsdauer ist. Wir können auch eine räumliche Schwingung betrachten, wo man dann $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ hat, mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ und der Wellenlänge λ . Im Folgenden werden wir alle Relationen für räumlich periodische Vorgänge formulieren. Man kann aber alle Ergebnisse leicht auf zeitliche Schwingungen übertragen, indem man $x \rightarrow t$, $k \rightarrow \omega$ ersetzt.

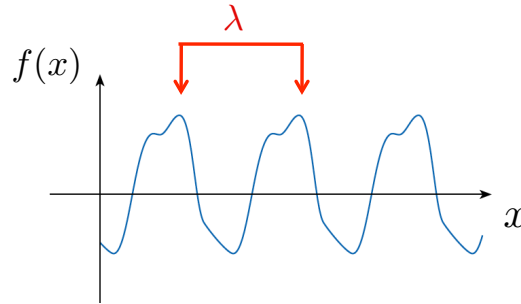


Fig. 1 — Periodische Funktion.

Es gibt natürlich periodische Funktionen, die nicht harmonisch sind, s. z.B. Fig. 1. Die Funktion $f(x)$ hat die Periode λ , d.h.

$$f(x + \lambda) = f(x) . \quad (1)$$

Die Idee bei der Fourierreihe ist es nun, eine solche Funktion darzustellen als Überlagerung von harmonischen Schwingungen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)) , \quad (2)$$

mit $k = 2\pi/\lambda$. Dabei hat die Grundschiwingung ($n = 1$) die Periode λ , die die Funktion f selbst hat, und die weiteren Terme (die sogenannten "höheren Harmonischen") haben jeweils die kürzere Periode λ/n . Auf diese Weise ist klar, dass die ganze Reihe mit λ periodisch ist. Die Konstante $a_0/2$ dient dazu, die Funktion gegebenenfalls vertikal zu verschieben.

Um die Fourierkoeffizienten a_n, b_n zu bestimmen, benutzt man, dass die Funktionen $\cos(nkx)$, $\sin(nkx)$ orthogonal sind:

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \cos(nkx) \cos(mkx) &= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \sin(nkx) \sin(mkx) \\ &= \frac{\lambda}{2} \delta_{mn} , \\ \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \cos(nkx) \sin(mkx) &= 0 . \end{aligned} \quad (3)$$

¹zusammengestellt von W. Vogelsang

Damit folgt mit (2):

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \cos(mkx) f(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} \lambda & m = 0 \\ a_m \frac{\lambda}{2} & m \neq 0 \end{cases}, \quad (4)$$

und analog für die Sinus-Terme. Dies liefert

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \cos(mkx) f(x), \\ b_m &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \sin(mkx) f(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Man kann also für eine gegebene Funktion f die Fourierkoeffizienten durch "Projektion" auf die Sinus- oder Cosinus-Schwingungen berechnen. Die Koeffizienten liefern dabei das Spektrum in k (bzw. für zeitlich-periodische Vorgänge das Frequenzspektrum): b_m gibt z.B. an, mit welcher "Stärke" die Schwingung $\sin(mkx)$ in $f(x)$ "vorkommt". Eine periodische Dreiecksschwingung (s. Fig. 2) lässt sich z.B. darstellen durch

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \frac{1}{7^2} \cos(7x) + \dots \right). \quad (6)$$

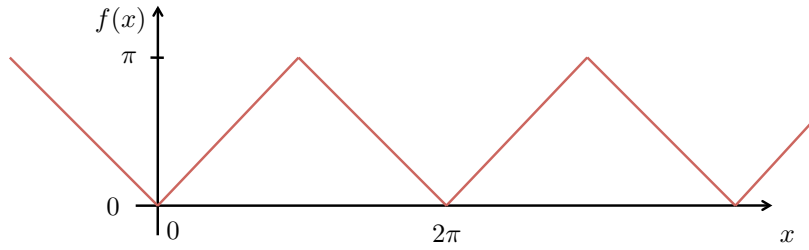


Fig. 2 — Periodische Dreiecksfunktion.

Man kann die Fourierreihe in (2) kompakter schreiben, wenn man die Sinus und Cosinus-Terme durch komplexe Exponentialfunktionen ersetzt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inkx} + e^{-inkx}}{2} + b_n \frac{e^{inkx} - e^{-inkx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inkx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inkx} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inkx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{inkx}, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei wir im letzten Schritt in der zweiten Summe einfach überall $n \rightarrow -n$ gesetzt haben. Wir können nun die rechte Seite von Gl. (7) zusammenfassend schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inkx}, \quad (8)$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} , \\ c_n &= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (9)$$

Man rechnet nach, dass aus den Orthogonalitätsrelationen (3) in dieser Notation

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx e^{-imkx} e^{inkx} = \lambda \delta_{mn} , \quad (10)$$

wird, und sich die Koeffizienten c_m als

$$c_m = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx e^{-imkx} f(x) \quad (11)$$

ergeben.

Wir können nun fragen, ob wir die Methode der Fourierzerlegung auch auf *nicht*periodische Funktionen ausdehnen können. Auf den ersten Blick scheint dies nicht möglich, da die Periodizität von $f(x)$ ja Voraussetzung war. Wir können allerdings fragen, was denn passiert, wenn wir die Periode λ der Funktion f gegen Unendlich schicken. Dies führt uns ja effektiv zu einer nicht mehr periodischen Funktion. Um diesen Limes zu bilden, starten wir mit Gl. (8) und setzen die c_n aus (11) ein:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inkx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inkx} \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx' e^{-inkx'} f(x') . \quad (12)$$

Da die linke Seite schon “ x ” enthält, haben wir die Integrationsvariable auf der rechten Seite in x' umbenannt. Wir setzen nun:

$$k_n \equiv nk = n \frac{2\pi}{\lambda} , \quad \Delta k_n \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{\lambda} . \quad (13)$$

Wir setzen dies in (12) ein und erhalten:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} \frac{\Delta k_n}{2\pi} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx' e^{-ik_n x'} f(x') . \quad (14)$$

Im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ rücken nach (13) benachbarte k -Werte immer näher zusammen, d.h., $\Delta k_n \rightarrow 0$. Für festes n wird k_n dann zwar selbst ebenfalls immer kleiner, aber da n ja alle beliebig großen Werte annehmen kann, wird k_n insgesamt zu einer kontinuierlich verteilten Variable k , mit $\Delta k_n \equiv dk$. Damit wird im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ aus (14):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) , \quad (15)$$

mit

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x') . \quad (16)$$

Wir haben dabei den Faktor $1/(2\pi)$ in (14) “zu gleichen Teilen” auf (15) und (16) verteilt. Gleichungen (15) und (16) definieren die *Fouriertransformation*. Eine Funktion $f(x)$ wird per (16) “Fourier-transformiert”; $\tilde{f}(k)$ bezeichnet ihre “Fourier-Transformierte”. (Die Integrationsvariable in (16) könnten wir natürlich genauso gut auch wieder x nennen– über sie wird ja integriert.) Gleichung (15) ist dann die Rücktransformation von $\tilde{f}(k)$ zu $f(x)$, die “Fourier-Inverse”.

Was ist beim Übergang von einer periodischen zu einer nicht-periodischen Funktion also passiert? Für eine periodische Funktion hatten wir Gl. (8), also eine Summe von diskreten (abzählbar unendlich vielen) Termen, mit Koeffizienten, die durch (11) gegeben sind. Für eine nicht-periodische Funktion hingegen brauchen wir nach (15),(16) kontinuierlich verteilte Werte von k , d.h., ein kontinuierliches Spektrum. *Alle* “Frequenzen”, nicht nur diskrete harmonische, sind notwendig, um eine nichtperiodische Funktion als Überlagerung von einzelnen Schwingungen darzustellen!

Die Fouriertransformation benutzen wir in der Quantenmechanik beim Übergang vom Ortsraum zum Impulsraum und bei der Konstruktion von Wellenpaketen. Dort ist sie nicht über die Wellenzahl k , sondern über den Impuls $p = \hbar k$ definiert. Man kann leicht in (15) die Substitution $k = p/\hbar$ machen, und erhält (wir gehen von der Notation $f(x)$, $\tilde{f}(p)$ zu den Wellenfunktionen $\psi(x)$, $\phi(p)$ der Quantenmechanik über):

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \phi(p) , \quad (17)$$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x) . \quad (18)$$

Wir haben hier den Faktor $1/\hbar$, der sich bei der Substitution durch $dk = dp/\hbar$ ergibt, wieder symmetrisch auf beide Ausdrücke verteilt. Wir werden in Übungsaufgabe 6 sehen, dass mit dieser Wahl gerade ϕ genau dann normiert ist, wenn ψ normiert ist. Gleichungen (17),(18) stellen genau den Zusammenhang zwischen der Wellenfunktion im Ortsraum und der im Impulsraum dar.

Zum Abschluss schauen wir noch, was passiert, wenn wir $\phi(p)$ aus (18) in (17) einsetzen:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \phi(p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ipx'/\hbar} \psi(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip(x-x')/\hbar} \right] \psi(x') . \end{aligned} \quad (19)$$

Dies muss für alle Funktionen $\psi(x)$ gelten, was nur der Fall sein kann, wenn

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip(x-x')/\hbar} = \delta(x - x') , \quad (20)$$

mit der Diracschen δ -Funktion.